

СИНТЕЗ НА ХАОТИЧНА СИНХРОНИЗАЦИОННА СХЕМА С ХИБРИДНА СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕЖДУ ДВА ХАОТИЧНИ МОДЕЛА НА TANG

Драгомир Чантов¹

¹Технически университет - Габрово

SYNTHESIS OF CHAOTIC SYNCHRONIZATION SCHEME WITH HYBRID SYNCHRONIZATION BETWEEN TWO TANG CHAOTIC MODELS

Dragomir Chantov¹

¹ Technical University of Gabrovo, Bulgaria

Abstract

In this paper a chaotic synchronization scheme with hybrid chaotic synchronization, which combines identical with anti-synchronization between different pairs of variables of two identical chaotic systems, is proposed. The desired synchronization is achieved with control functions to the slave chaotic system, which are designed according to the Lyapunov second law for stability analysis. The main advantage of the hybrid synchronization over the more common identical one is the enhanced level of data protection in the chaotic communication systems.

Keywords: chaotic systems; chaotic synchronization; hybrid synchronization; Lyapunov function.

ВЪВЕДЕНИЕ

При хаотичната синхронизация целта е да се проектира такава връзка между обикновено две еднотипни хаотични системи, че след кратък преходен процес техните променливи на състоянието да извършват напълно идентични, но в същото време хаотични движения. Такъв тип синхронизация се нарича идентична [1,2]. В някои публикации от последните години синхронизационните схеми се проектират така, че при синхронизация сумата от съответните двойки хаотични променливи, да клони към нула. Това явление се нарича „антисинхронизация“ [3].

Основният мотив да се проектират синхронизационни или анти-синхронизационни схеми е тяхното потенциално

приложение в различни комуникационни системи, при които има изискване за защита на информацията. В предавателя и в приемника на комуникационната система се вграждат хаотични системи, които се синхронизират, и по синхронизиращия хаотичен сигнал по една или друга форма, например чрез хаотично превключване, хаотична модулация или чрез хаотично маскиране се предава информационният сигнал. При това по публично достъпното трасе между предавателя и приемника е видим само хаотичен сигнал, който за един страничен наблюдател има вид на напълно случаен процес. В същото време, при успешна синхронизация хаотичната система в приемника, по същество става идентично копие на тази в предавателя и това

позволява лесното извличане на информационния сигнал в приемника. Установено е, че ако хаотичните системи в предавателя и в приемника са в режим на антисинхронизация, това може да повиши степента на защита на информационния сигнал.

През последните години е въведено понятието хибридна синхронизация [4-8], която се характеризира със синтезиране на хаотична синхронизационна схема по такъв начин, че част от двойките променливи на състоянието на двете синхронизиращи се системи да са в режим на идентична синхронизация, а друга част в режим на антисинхронизация. Целта отново е повишаване степента на защита на сигналите в хаотичните комуникационни системи.

В настоящия доклад се предлага синтез на хаотична синхронизационна схема с хибридна синхронизация на основата на синтез на управляващи функции според втория метод за устойчивост на Ляпунов. За основа е избран сравнително нов хаотичен модел, наречен модел на Tang.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Системата на Tang се описва със следните уравнения [9,10]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - dx_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - ex_1 - ex_3, \end{aligned} \quad (1)$$

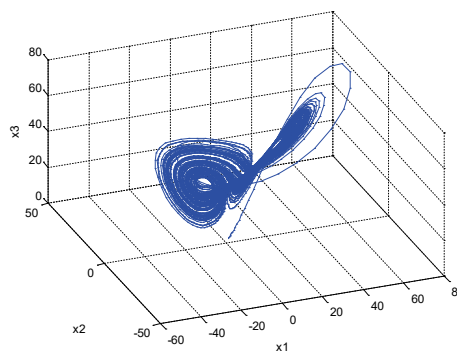
където:

$$a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d = 0.1, e = 4. \quad (2)$$

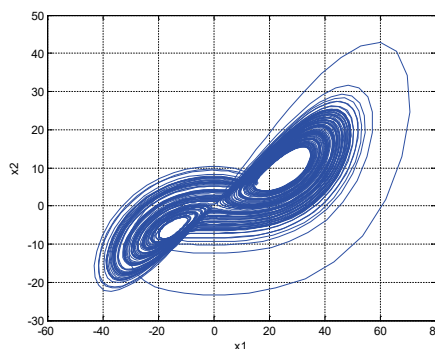
На фиг. 1 е показан хаотичния атрактор на модела на Tang в пространството на състоянието (x_1, x_2, x_3) за начални условия $\mathbf{x}(0) = [1.2 \ 0.6 \ 1.8]^T$. На фиг. 2 е показана проекцията на атрактора в една от фазовите равнини - (x_1, x_2) . На фиг. 3 е показана една от времевите характеристики на променливите на съ-

стоянието - $x_2(t)$. Подобна е динамиката и на останалите променливи. Както атрактора, така и времевите характеристики са типични за система с хаотичен характер.

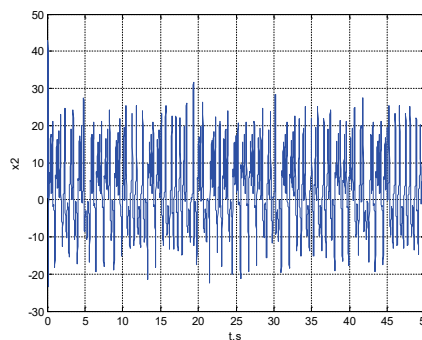
Системата (1) може да се избере за управляваща (Master) система в една хаотична синхронизационна схема. Съществуват различни подходи за синтез на управлявана или подчинена (Slave) система. В най-общия случай една такава система може да се представи със следните уравнения:



Фиг. 1. Хаотичен атрактор на модела на Tang



Фиг. 2. Проекция на атрактора на Tang в една от фазовите равнини



Фиг. 3. Динамика на една от променливите на състоянието на модела на Tang

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 + u_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= c\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3 - d\tilde{x}_2 + u_2, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_1\tilde{x}_2 - e\tilde{x}_1 + e\tilde{x}_3 + u_3,\end{aligned}\quad (3)$$

където с $\tilde{x}_i, i = 1 \div 3$ са означени променливите на системата Slave, наборът параметри е същият, като на Master системата (1), а $u_i, i = 1 \div 3$ са управляващи функции към Slave системата.

Същността на задачата е управляващите функции $u_i, i = 1 \div 3$ да се синтезират така, че да се получи желаната форма на синхронизация между системите (1) и (3).

Съгласно поставената задача за синтез на хибридна синхронизационна схема е необходимо част от двойките променливи на двете системи да са идентични, което съответства на режим на синхронизация между тях, а друга част от двойките променливи да са еднакви по модул, но с различен знак, което съответства на режим на антисинхронизация.

Нека бъдат избрани следните функции на разсъгласуване:

$$\begin{aligned}e_1 &= x_1 - \tilde{x}_1, \\ e_2 &= x_2 + \tilde{x}_2, \\ e_3 &= x_3 - \tilde{x}_3,\end{aligned}\quad (4)$$

т.е. поставяме си за цел да се проектира хаотична синхронизационна схема между двете идентични системи от трети ред, при която първата и третата двойки променливи на двете системи да са синхронизирани идентично, а втората да бъде в режим на антисинхронизация.

Проектирането на управляващите функции u_i от (3) започва от получаването на системата от разсъгласуването между системите (1) и (3). Тази система се получава при изваждането на първото и третото уравнения на Slave системата от първото и третото уравнения на Master системата и сумиране на вторите уравнения на двете системи, което е в съгласие с избраната хибридна схема (4):

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{e}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{\tilde{x}}_3\end{aligned}\quad (5)$$

След заместване на съответните изрази от системите (1) и (3) в (5) за системата от разсъгласуването се получава:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -ax_1 + bx_2 + a\tilde{x}_1 - b\tilde{x}_2 - u_1 \\ \dot{e}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - dx_2 + c\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3 - d\tilde{x}_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= x_1x_2 - ex_1 - ex_3 - \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + e\tilde{x}_1 + e\tilde{x}_3 - u_3\end{aligned}\quad (6)$$

Ако се синтезират такива управляващи функции, за които да се докаже, че точката $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3] = \mathbf{0}$ е устойчива, задачата за хибридна синхронизация ще бъде успешно изпълнена. При това синтезът може да се извърши на основата на изпълнението на условията за устойчивост на система по втория метод за устойчивост на Ляпунов. Според този метод, ако се намери функция $V(\mathbf{e})$, наречена функция на Ляпунов, която отговаря на следните условия:

$$V(\mathbf{e}(t)) > 0, \forall \mathbf{e} \neq 0, \quad (7)$$

$$V(\mathbf{e}(t)) = 0, \forall \mathbf{e} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dV(\mathbf{e}(t))}{dt} < 0, \forall \mathbf{e} \neq 0 \quad (9)$$

то точката $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3] = \mathbf{0}$ ще бъде устойчива, което е достатъчно условие за постигане на желаната синхронизация.

Не е трудно да се избере функция на Ляпунов, която да отговаря на условията (7) и (8). Практически всяка квадратична функция от променливите на разсъгласуване $e_i(t)$ отговаря на тези условия. Затова основната задача при синтеза на управляващи функции е те да се изберат така, че да отговарят и на условието (9). Няма универсален подход за решаването на тази задача. При синтеза на управля-

ваши функции се подхожда индивидуално в зависимост от конкретния модел на хаотична система, който е избран за основа на синхронизационната схема. Тогава с оглед на изпълнението на условието (9) могат да се синтезират следните управляващи функции към Slave системата (3):

$$\begin{aligned} u_1 &= -ax_1 + bx_2 + a\tilde{x}_1 - b\tilde{x}_2 + k_1 e_1, \\ u_2 &= -cx_1 + x_1 x_3 + dx_2 - c\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + d\tilde{x}_2 - k_2 e_2, \\ u_3 &= x_1 x_2 - ex_1 - ex_3 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + e\tilde{x}_1 + e\tilde{x}_3 + k_3 e_3, \end{aligned} \quad (10)$$

където k_i са положителни константи.

За функция на Ляпунов може да се избере стандартна квадратична функция от променливите на разсъгласуване:

$$V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2). \quad (11)$$

За производната на функцията $V(e)$ се получава:

$$\frac{dV(e)}{dt} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3. \quad (12)$$

При заместване на изразите за управляващите функции (10) в системата от разсъгласуването (6) се получава:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= -k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 &= -k_3 e_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Оттук може да се види, че равновесната точка на системата от разсъгласуването, която се получава при приравняване на десните страни на нула действително е $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ или $e = 0$.

Тогава, ако изразите (13) се заместят в (12), се получава:

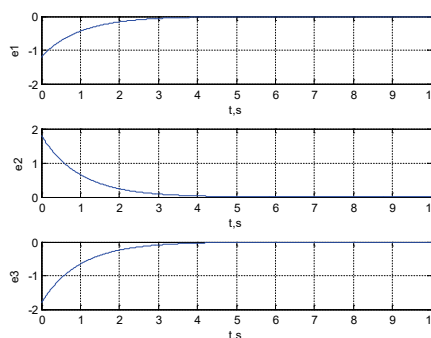
$$\frac{dV(e)}{dt} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2. \quad (14)$$

Ако всички константи k_i в управляващите функции (10) се изберат положи-

телни, ще се изпълни и условието (9) за отрицателно определена първа производна на функцията на Ляпунов.

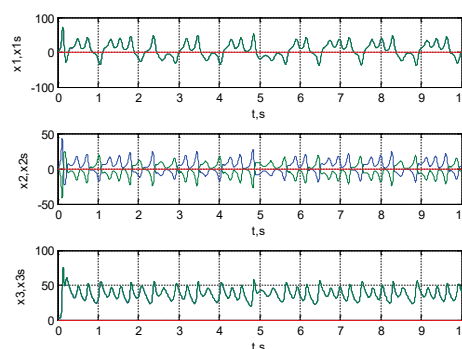
Така избраната функция на Ляпунов ще отговаря на условията (7), (8) и (9), следователно между Master и Slave системите ще се постигне желаната форма на хибридна синхронизация.

На фиг. 4 са показани времевите характеристики на функциите на разсъгласуване $e_i(t)$, $i=1 \div 3$ от типа (4), получени при симулация на хибридна синхронизационна схема с Master система (1) и Slave система (3) с управляващи функции (10) и стойности на коефициентите $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Вижда се, че след преходен процес от около 3.5 s системите се синхронизират по желания начин.



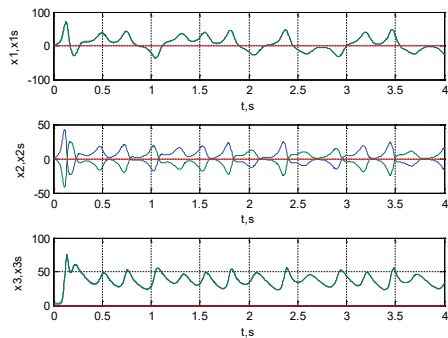
Фиг. 4. Функции на разсъгласуване за $k_1 = k_2 = k_3 = 1$

На фиг. 5 е показана съвместната динамика на двойките променливи на двете хаотични системи от хибридна синхронизационна схема, съответно $x_1(t), \tilde{x}_1(t)$, $x_2(t), \tilde{x}_2(t)$ и $x_3(t), \tilde{x}_3(t)$.



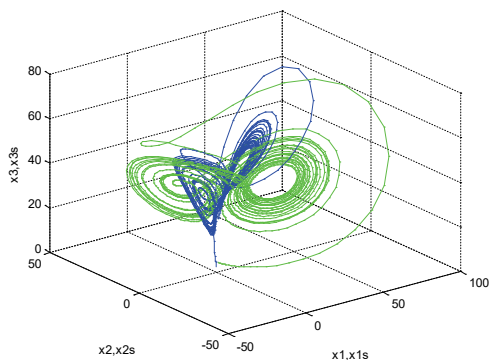
Фиг. 5. Съвместна динамика на двойките променливи при желания тип хибридна синхронизация

Първата и третата двойки променливи имат идентична и в същото време – хаотична динамика, а втората двойка променливи е в режим на антисинхронизация – ясно се вижда, че тук динамиката на едната променлива е еднаква по модул, но с обратен знак, на динамиката на другата променлива, т.е. втората променлива от Slave системата проявява един вид реципрочно хаотично движение спрямо втората променлива на Master системата. Фиг. 5 потвърждава, че зависимостите (4) клонят към нула и се получава желаната вид хибридна синхронизация. На фиг. 6 данните от фиг. 5 в друг мащаб за добиване на по-ясна представа за описаната по-горе динамика на двете системи.



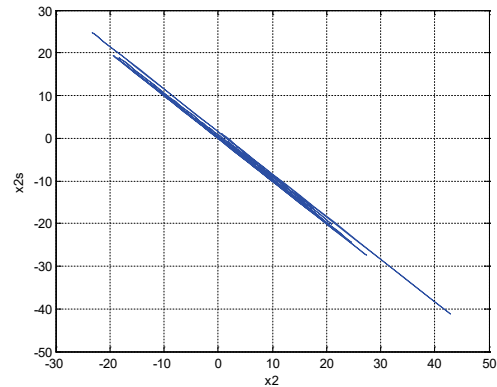
Фиг. 6. Съвместна динамика на двойките променливи при желаната тип хибридна синхронизация в друг мащаб

На практика при хибридна синхронизация се променя целият хаотичен атрактор на Slave системата. На фиг. 7 са показани атракторите на системите (1) и (3) при получена хибридна синхронизация. Фигурата ясно илюстрира различията хаотичен атрактор на втората система, визуализиран със зелен цвят.



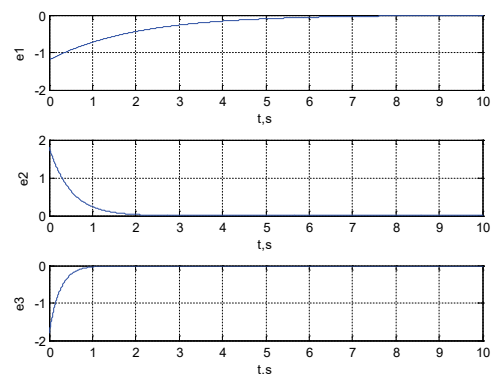
Фиг. 7. Атрактори на двете хаотични системи при хибридна синхронизация

Режимът на антисинхронизация между променливите x_2 и \tilde{x}_2 може да се види при построяване на зависимостта $\tilde{x}_2 = f(x_2(t))$, показана на фиг. 8.



Фиг. 8. Зависимост $\tilde{x}_2 = f(x_2(t))$, потвърждаваща антисинхронизация между двете променливи

Наличието на допълнителни коефициенти k_i в управляващите функции (10) дава възможности за настройване на продължителността на преходните процеси до достигането на желаната вид синхронизация. На фиг. 9 са показани времевите характеристики на функциите на разсъгласуване $e_i(t)$, $i=1 \div 3$ от типа (4) за стойности на коефициентите $k_1 = 0.5$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 4$. Както се вижда, продължителността на преходния процес е пропорционална на големината на съответния коефициент, като първата двойка променливи се синхронизира за около 7 s, втората – за 2 s, а третата – за 1 s.



Фиг. 9. Функции на разсъгласуване за $k_1 = 0.5$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен е алгоритъм за синтез на хаотична синхронизационна схема на основата на два еднотипни хаотични непрекъснати модела от трети ред с цел получаване на хибридна синхронизация между системите. Получаването на желаня тип синхронизация е постигнато чрез прилагане на активно управление към подчинената система, като управляващите функции са синтезирани на основата на втория метод за устойчивост на Ляпунов. По такъв начин предварително аналитично се доказва постигането на желаня тип синхронизация, което след това е проверено с компютърни симулации. Хибридната синхронизация е илюстрирана с четири вида графични зависимости, получени при симулациите – времева динамика на функциите на разсъгласуване, съвместна динамика на отделните двойки променливи на системите, изобразяване на хаотичните атрактори на управляващата и на подчинената системи в общо пространство на състоянието и зависимостите между дадена променлива на едната система и съответстващата ѝ променлива от другата система.

Разгледаният подход за синтез на хибридна хаотична синхронизационна схема може да бъде приложен по аналогичен начин за синтез на управляващи функции при други комбинации от функции на разсъгласуване, съчетаващи идентична с антисинхронизация между отделните двойки променливи на двете хаотични системи.

REFERENCE

- [1] Pecora, L., T. Carroll, G. Johnson, D. Mar, J. Heagy, Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications, Chaos 7(4), 1997, pp.520-543.
- [2] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Physical Review Letters, Vol.64, No.8, 1990, pp.821-824.
- [3] J. Feng, A. Dai, F. Austin, L. He. “Anti-synchronization of two different hyperchaotic systems with fully uncertain parameters”. Computational Intelligence and Security, 2009..
- [4] Pakiriswamy, S., S. Vaidyanathan. Active controller design for the generalized projective synchronization of three-scroll chaotic systems. Int. J. of Advanced Information Technology, Vol.2, No.1, 2012, pp.37-53.
- [5] Karthikeyan, R., S. Vaidyanathan. Hybrid chaos synchronization of four-scroll systems via active control. Journal of Electrical Engineering, Vol 65, No.2, 2014, 97-103.
- [6] Ouannas A., A. Azar, S. Vaidyanathan. A robust method for new fractional hybrid chaos synchronization. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Vol. 40, No.5, 2017, 1804-1812.
- [7] Xie, Q., G. Chen, E. Bolt. Hybrid chaos synchronization and its application in information processing. Mathematical and Computer Modelling. Vol. 35, No.1-2, 2002. 145-163.
- [8] Rasappan, S., Vaidyanathan, S.: Hybrid synchronization of n-scroll Chua and Lur’e chaotic systems via backstepping control with novel feedback. Arch. Control Sci. **22**(3), 343–365 (2012b).
- [9] Tang, L., L. Jing, F. Bing, Z.-M. Yue. A new three-dimensional chaotic system and its circuit simulation. Acta Physica Sinica. Vol. 58. No.2. 2009. 785-793.
- [10] Tang, L., Z. Kang. Research of network synchronization based on three-dimensional chaotic system. Proceedings of IEEE Int.Conf. of Network Infrastructure and Digital Content. 2009. 931-935.