

**КАСКАДНА ХАОТИЧНА СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕЖДУ ТРИ  
ТРИМЕРНИ ХАОТИЧНИ СИСТЕМИ****Драгомир Чантов<sup>1</sup>**<sup>1</sup>*Технически университет - Габрово***CASCADE CHAOTIC SYNCHRONIZATION BETWEEN THREE  
THREE-DIMENSIONAL CHAOTIC SYSTEMS****Dragomir Chantov<sup>1</sup>**<sup>1</sup>*Technical University of Gabrovo, Bulgaria***Abstract**

*In this paper synchronization schemes between three identical three-dimensional Zhang-Li-Chang chaotic systems are proposed. The main idea is to achieve identical synchronism first between two such systems by designing a proper coupling between them and then to apply a similar approach to synchronize the second system with a third one. In such way all three systems will have identical and by the same time chaotic behaviour. This feature can be used in a communication system with chaotic data encryption where the data is secured by chaotic bearing signal. The middle chaotic system models acts as a re-translate system in the communication system.*

**Keywords:** chaotic systems; chaotic synchronization; cascade synchronization; linear-nonlinear decomposition.

**ВЪВЕДЕНИЕ**

Нелинейните системи с хаотична динамика са специфичен клас системи, които имат характеристики както на детерминирани, така и на стохастични системи. Например те се описват с детерминирани, обикновено прости и от нисък ред диференциални уравнения с известни параметри и начални условия, но в същото време имат поведение, което е по-присъщо на стохастичните системи. Например, техният атрактор в пространството на състоянието се състои от теоретично безкраен брой неустойчиви периодични орбити, като не може да се предскаже в кой момент по коя орбита ще се движи системата. Тази непредсказуемост има връзка със силната чувствителност към началните условия на хаотичните системи, което е техен основен отличителен белег. Всичко това прави

хаотичните системи интересен обект за изследване и търсене на евентуални области от практиката, където техните специфични свойства могат да се използват.

Така например съществува клас задачи, при които със средствата на теорията на автоматичното управление, в частност тази за нелинейните системи, се търси управление към дадена хаотична система с цел тя да се стабилизира в равновесна точка или периодична орбита и така хаосът да се елиминира [1,2]. При друг клас задачи се цели изкуствено хаотифициране на система, ако това ще доведе до по-ефективна работа [3].

При трети клас задачи се търси връзка между две или повече, идентични или не хаотични системи, така че те по определен начин да синхронизират динамиката си [4-6]. Бързото развитие на този раздел от теорията на хаоса през последните

години е обусловено от редица възможни приложения на хаотичната синхронизация в практиката и най-вече при реализиране на комуникации с висока степен на защита от неототоризиран достъп. През последните три десетилетия са предложени редица разнообразни по своя характер методи за реализиране на хаотична синхронизация [7,8], като при някои от тях се въвежда допълнителен управляващ/синхронизиращ сигнал от едната система към другата, а при други променливи от едната система директно заместват променливи от другата. На базата на такива хаотични синхронизационни схеми се реализират системи за защитено предаване на данни или системи за криптиране на информация, при които полезният сигнал се маскира с хаотична компонента, което прави трудно или дори невъзможно неговото извличане при евентуално прехващане.

Специфичен тип хаотична синхронизация е каскадната синхронизация, при която за разлика от стандартния случай, когато се синхронизират две хаотични системи, целта е постигане на идентична или друг тип синхронизация между три и повече системи [6]. Този тип синхронизация намира приложение например при по-сложни хаотични комуникационни системи, при които се налага включването на една или повече системи-ретранслатори на сигналите.

В статията се предлагат схеми за каскадна синхронизация на хаотични системи на основата на сравнително нов модел на тримерна непрекъсната хаотична система. Схемите са реализирани на основата на двустепенна връзка между всяка двойка системи, състояща се от декомпозиционен подход от тип линейно-нелинейна декомпозиция и свързване с обратна връзка. Първата връзка осигурява линейна система от разсъгласуване и съответно лесен анализ на устойчивостта на синхронизационната схема, а втората – множество комбинации от връзки и избор на най-добрия вариант.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

За основа на хаотичните синхронизационни схеми е избран т.н. модел на Zhang-Li-Chang, предложен от колектив китайски учени през 2017 г. [9] Моделът е абстрактен модел на хаотична система от трети ред и е с непрекъснат характер. Уравненията на модела са:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + bx_2 - x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_2^2 - cx_3 + dx_1^2.\end{aligned}\quad (1)$$

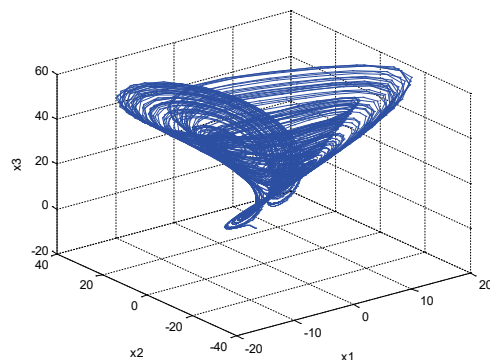
Моделът има четири параметъра, чиито номинални стойности са:

$$a = 12, b = 25, c = 8, d = 0.5. \quad (2)$$

Уравненията (1) са симулирани с помощта на симулационната среда Simulink на популярния програмен продукт Matlab с произволно избрани начални условия:

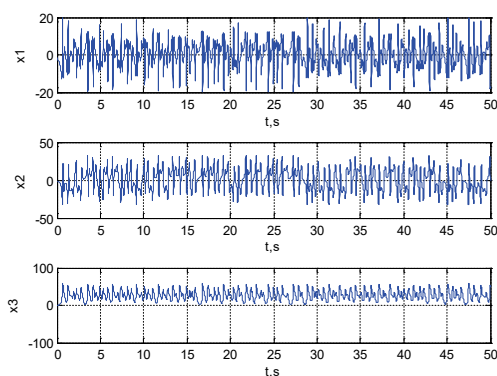
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(0) &= [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^T = \\ &= [-1.8 \quad -1.5 \quad -2.5]^T\end{aligned}\quad (3)$$

На фиг. 1 е показан общият вид на хаотичния атрактор на системата в пространството на състоянието  $(x_1, x_2, x_3)$ . На фиг. 2 са показани времевите характеристики на отделните променливи на състоянието  $x_i$ . Както се вижда, те имат типичния за хаотична система вид – неразличими са от сигнали със случаен характер.

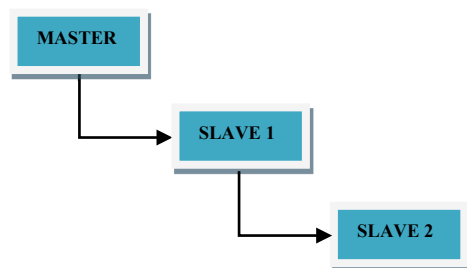


Фиг. 1. Хаотичен атрактор на модела на Zhang-Li-Chang

На фиг. 3 е представена общата идея за реализиране на хаотична каскадна синхронизационна система на основата на модела (1). Схемата ще се състои от три идентични модела на Zhang-Li-Chang с еднопосочна връзка между тях. Първата система е управляващата или Master система, която осигурява синхронизиращ сигнал към втората система, наречена Slave 1. Тя е в ролята на подчинена система на Master системата и в същото време – в ролята на управляваща система за третата система – Slave 2.



Фиг. 2. Времени характеристики на променливите на модела на Zhang-Li-Chang



Фиг. 3. Схема за еднопосочна каскадна синхронизация

При успешно синтезирани връзки между системите от Фиг. 3 системата Slave 1 ще подчини динамиката си на тази на системата Master, а системата Slave 2 ще подчини динамиката си на системата Slave 1 и следователно нейната динамика също ще стане идентична на тази на Master системата.

Ще бъдат разгледани варианти както на еднотипни, така и на разнотипни връзки между двете двойки хаотични системи Master - Slave 1 и Slave 1 - Slave 2.

### Вариант с еднотипна връзка между двете двойки системи.

Нека Master системата се описва с уравнения (1). В базова конфигурация без връзки между системите, системите Slave 1 и Slave 2 ще бъдат:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_2^2 - c\tilde{x}_3 + d\tilde{x}_1^2.\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\tilde{x}}}_1 &= -a\tilde{\tilde{x}}_1 + b\tilde{\tilde{x}}_2 - \tilde{\tilde{x}}_2\tilde{\tilde{x}}_3, \\ \dot{\tilde{\tilde{x}}}_2 &= \tilde{\tilde{x}}_1 + \tilde{\tilde{x}}_2 + \tilde{\tilde{x}}_1\tilde{\tilde{x}}_3, \\ \dot{\tilde{\tilde{x}}}_3 &= \tilde{\tilde{x}}_2^2 - c\tilde{\tilde{x}}_3 + d\tilde{\tilde{x}}_1^2,\end{aligned}\quad (5)$$

където с  $\tilde{x}_i, i = 1 \div 3$  са означени променливите на системата Slave 1, а с  $\tilde{\tilde{x}}_i, i = 1 \div 3$  са означени променливите на системата Slave 2.

Трите системи (1), (4) и (5) са с идентични набори параметри - (2), но са с различни начални условия. Началните условия на Master системата са (3), тези на системите Slave 1 и Slave 2 са съответно:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(0) &= [\tilde{x}_1(0) \quad \tilde{x}_2(0) \quad \tilde{x}_3(0)]^T = \\ &= [-1.7 \quad -1.3 \quad -2.4]^T\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(0) &= [\tilde{\tilde{x}}_1(0) \quad \tilde{\tilde{x}}_2(0) \quad \tilde{\tilde{x}}_3(0)]^T = \\ &= [-1.6 \quad -1.2 \quad -2.3]^T\end{aligned}\quad (7)$$

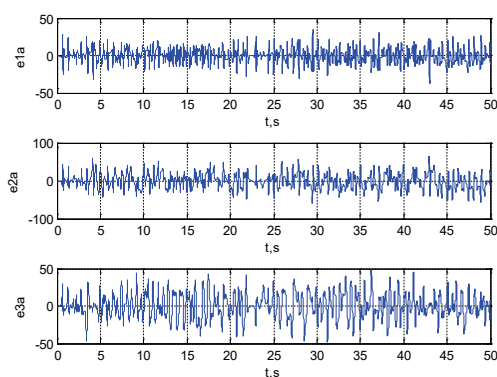
и са избрани на произволен принцип.

Дефинират се следните функции на разсъгласуване между променливите на системите Master - Slave 1 и Slave 1 - Slave 2:

$$e_{ia} = x_i - \tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (8)$$

$$e_{ib} = \tilde{x}_i - \tilde{\tilde{x}}_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (9)$$

Тъй като първоначално между системите (1), (4) и (5) няма връзка, то независимо, че началните им условия са близко разположени точки в пространството на състоянието – (3), (6) и (7) и наборите им параметри са еднакви, системите нямат да имат идентична динамика. Това е характерна особеност на хаотичните системи и се илюстрира с динамиката на функциите на разсъгласуване (8), показана на фиг. 4. Аналогична е динамиката на функциите (9).



**Фиг. 4.** Функции на разсъгласуване между системите Master и Slave 1 без връзка между тях

Нека системата Slave 1 (4) се модифицира така, че да се реализира връзка между нея и системата Master (1) на принципа на линейно-нелинейната декомпозиция [10], т.е. всички нелинейни елементи в модела (4) се заместват с техните аналози от (1):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \underline{x}_2\underline{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \underline{x}_1\underline{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_2^2 - c\tilde{x}_3 + d\underline{x}_1^2.\end{aligned}\quad (10)$$

Така на практика е реализирана синхронизационна схема между системите (1) и (4), като връзките между двете системи, т.е. нелинейните елементи, са подчертани. Този принцип на връзка е много удобен за анализ на устойчивостта на така синтезираната синхронизационна схема, защото при него системата от раз-

съгласуването е линейна. Тази система се получава, като се извадят уравненията на системата Slave 1 (10) от тези на Master системата (1) с отчитане на зависимостите (8), както и че  $\dot{e}_{ia} = \dot{x}_{ia} - \dot{\tilde{x}}_{ia}$ :

$$\begin{aligned}\dot{e}_{1a} &= -ae_{1a} + be_{2a}, \\ \dot{e}_{2a} &= e_{1a} + e_{2a}, \\ \dot{e}_{3a} &= -ce_{3a}.\end{aligned}\quad (11)$$

Системата от разсъгласуването (11) може да се запише в пространството на състоянието във вида  $\dot{\mathbf{e}}_a = \mathbf{A}\mathbf{e}_a$ , където  $\mathbf{e}_a = [e_{1a} \ e_{2a} \ e_{3a}]^T$ . Нейната матрица на състоянието, от която се определя устойчивостта на схемата (1) – (10), ще бъде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 25 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.\quad (12)$$

Собствените стойности на матрицата (12) са:

$$\lambda_1 = 2.7, \lambda_2 = -8, \lambda_3 = -13.7.\quad (13)$$

Наличието на положителна собствена стойност показва, че системата (11) е неустойчива, т.е. синхронизационната схема (1) – (10) не може да осигури идентична синхронизация, при която функциите на разсъгласуване (8) да клонят към нула. Затова дори двете системи да бъдат с много близки начални условия, какъвто е случая, тяхното движение ще е несинхронно. Видът на функциите (8) не се отличава от този при случая без връзка между системите от Фиг. 4. В такъв случай синтезирането на следващата система Slave 2 става безпредметно, т.е. каскадна синхронизационна схема с еднотипна връзка между системите от типа линейно-нелинейна декомпозиция не може да се реализира.

Нека се добави вторична връзка към уравненията на системата Slave (10), генерирана на принципа на метода за

хаотична синхронизация с въвеждане на обратна връзка. Избран е вариант, при който връзката е към второ уравнение:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \underline{x_2x_3}, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \underline{x_1x_3} + \underline{\alpha(x_2 - \tilde{x}_2)}, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_2^2 - c\tilde{x}_3 + d\underline{x_1^2},\end{aligned}\quad (14)$$

т.е. към второто уравнение се добавя сигнал, пропорционален на функцията  $e_{2a} = x_2 - \tilde{x}_2$ . Коефициентът на връзка  $\alpha$  се избира така, че по възможност всички собствени стойности на матрицата на състоянието (12) да бъдат в лявата полуравнина на комплексната равнина. Например при  $\alpha = 5$  матрицата  $\mathbf{A}$  ще бъде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & b & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 25 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.\quad (15)$$

Собствените стойности на матрицата (15) са:

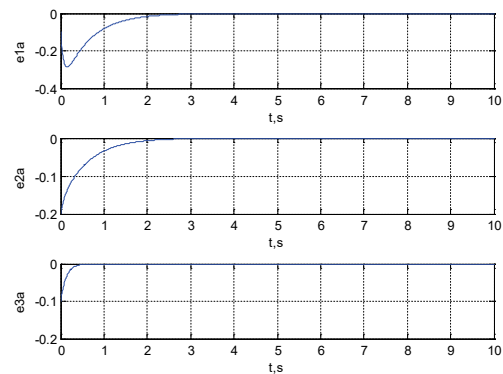
$$\lambda_1 = -1.6, \lambda_2 = -8, \lambda_3 = -14.4.\quad (16)$$

Всички собствени стойности са отрицателни, следователно синхронизационна система с Master система от вида (1) и система Slave 1 от вида (14) ще бъде устойчива и ще осигури постигането на идентична синхронизация между двете системи. Тогава същият тип свързване може да се приложи и между системите Slave 1 и Slave 2. Така системата Slave 2 ще бъде:

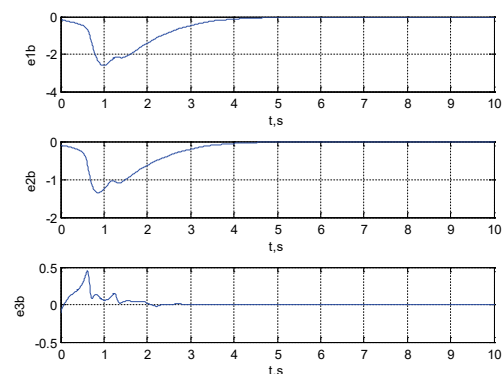
$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\tilde{x}}}_1 &= -a\tilde{\tilde{x}}_1 + b\tilde{\tilde{x}}_2 - \underline{\tilde{\tilde{x}}_2\tilde{\tilde{x}}_3}, \\ \dot{\tilde{\tilde{x}}}_2 &= \tilde{\tilde{x}}_1 + \tilde{\tilde{x}}_2 + \underline{\tilde{\tilde{x}}_1\tilde{\tilde{x}}_3} + \underline{\alpha(\tilde{\tilde{x}}_2 - \tilde{\tilde{x}}_2)}, \\ \dot{\tilde{\tilde{x}}}_3 &= \tilde{\tilde{x}}_2^2 - c\tilde{\tilde{x}}_3 + d\underline{\tilde{\tilde{x}}_1^2}.\end{aligned}\quad (17)$$

Тъй като връзката е еднотипна на тази между системите Master и Slave 1, не се

налага анализ на устойчивостта за схемата Slave 1 - Slave 2. Симулациите потвърждават наличието на идентична синхронизация между трите системи. На фиг. 5 са показани функциите на разсъгласуване (8), а на фиг. 6 – функциите на разсъгласуване (9). Началните условия на трите системи са (3), (6) и (7). От фиг. 5 се вижда, че след преходен процес от около 3 s функциите  $e_{ia} = x_i - \tilde{x}_i$ ,  $i = 1 \div 3$  клонят към нула, което съответства на идентична синхронизация между системите Master и Slave 1. От фиг. 6 се вижда, че след преходен процес от около 5 s функциите  $e_{ib} = x_i - \tilde{\tilde{x}}_i$ ,  $i = 1 \div 3$  също клонят към нула, т.е. системата Slave 2 се синхронизира със системата Slave 1.



Фиг. 5. Функции на разсъгласуване между системи Master (1) и Slave 1 (14)



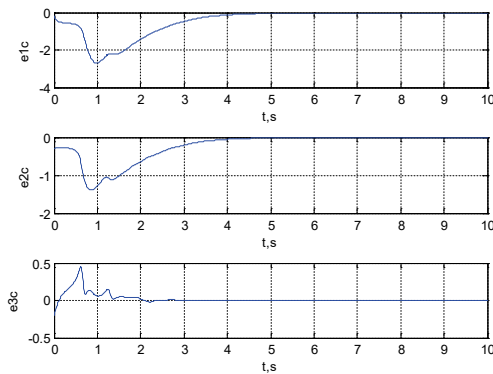
Фиг. 6. Функции на разсъгласуване между системи Slave 1 (14) и Slave 2 (17)

Могат да се дефинират и функции на разсъгласуване между системите Master и Slave 2:

$$e_{ic} = x_i - \tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (18)$$

Тези функции са показани на фиг. 7 и потвърждават наличието на идентична синхронизация и между системите Master (1) и Slave 2 (17).

Така наличието на идентична синхронизация в разглежданата каскадна схема от три хаотични системи е доказано аналитично и потвърдено чрез компютърна симулация.



Фиг. 7. Функции на разсъгласуване между системи Master (1) и Slave 2 (17)

### Вариант с разнотипна връзка между двете двойки системи.

Ще бъде потърсен вариант на схема за каскадна синхронизация между три системи на Zhang-Li-Chang, при който връзката между системите Master и Slave 1 се различава от тази между системите Slave 1 и Slave 2. Нека първите две системи от каскадната синхронизационна система са тези от предишната точка, т.е. системи (1) и (14), като коефициентът  $\alpha$  ще бъде означен като  $\alpha_a$  и ще запази стойността си  $\alpha_a = 5$ . След последователно тестване на различни видове вторични връзки между системите Slave (1) и Slave (2) е избран следният вариант за системата Slave 2:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3 + \alpha_b(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_2^2 - c\tilde{x}_3 + d\tilde{x}_1^2, \end{aligned} \quad (19)$$

т.е. към второто уравнение този път се добавя сигнал, пропорционален на функцията  $e_{1b} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1$ .

За  $\alpha_b = 10$  матрицата  $A$  ще бъде:

$$A = \begin{bmatrix} -a & b & 0 \\ 1 - \alpha_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 25 & 0 \\ -9 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

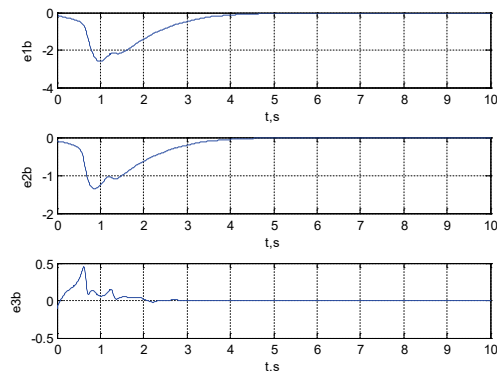
Собствените стойности на матрицата (20) са:

$$\lambda_{1,2} = -5.5 \pm 13.5j, \quad \lambda_3 = -8. \quad (21)$$

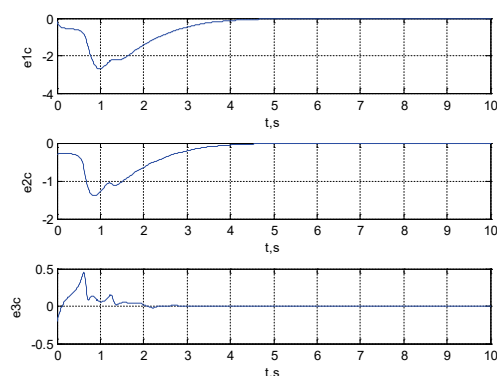
И трите собствени стойности са или отрицателни, или с отрицателни реални части. Следователно при така синтезираната част от синхронизационната схема между системите Slave 1 и Slave 2 също ще бъде изпълнено условието за синхронизация.

Симулациите потвърждават наличието на идентична синхронизация между трите системи от каскадната схема (1) – (14) – (19). Функциите на разсъгласуване  $e_{ia} = x_i - \tilde{x}_i$ ,  $i = 1 \div 3$  не се отличават от тези на фиг. 5. На фиг. 8 са показани функциите на разсъгласуване  $e_{ib} = x_i - \tilde{x}_i$ ,  $i = 1 \div 3$ . На фиг. 9 са показани функциите на разсъгласуване  $e_{ic} = x_i - \tilde{x}_i$ ,  $i = 1 \div 3$ . Началните условия на трите системи са (3), (6) и (7). Вижда се, че отново се постига идентична синхронизация между трите хаотични системи Master, Slave 1 и Slave 2, като преходните процеси са със сходна продължителност с тези от каскадната схема с еднотипна връзка.

И при двата разгледани варианта на каскадни синхронизационни схеми е изследвано влиянието на коефициентите на допълнителните връзки  $\alpha_i$  върху продължителността на преходните процеси.

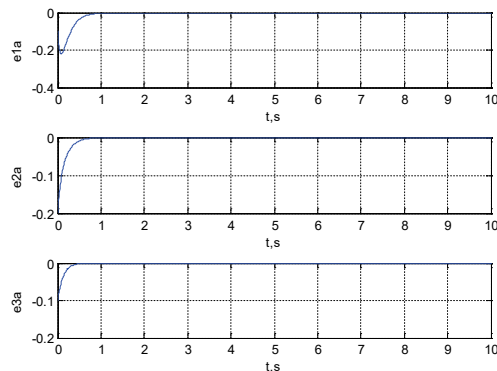


**Фиг. 8.** Функции на разсъгласуване между системи Slave 1 (14) и Slave 2 (19)



**Фиг. 9.** Функции на разсъгласуване между системи Master (1) и Slave 2 (19)

Например, ако при каскадните синхронизационни схеми Master (1) – Slave 1 (14) – Slave 2 (17) или Master (1) – Slave 1 (14) – Slave 2 (19) се избере коефициент на връзка между първата двойка системи  $\alpha_a = 10$ , вместо предишната стойност  $\alpha_a = 5$ , се наблюдава значително намаляване на продължителността на преходните процеси. На фиг. 10 са показани функциите на разсъгласуване  $e_{ia} = x_i - \tilde{x}_i$ ,  $i = 1 \div 3$  за схемата Master (1) – Slave 1 (14) – Slave 2 (19). Вижда се, че преходният процес до синхронизирането на системите е около два и половина пъти по-кратък в сравнение с този от фиг. 5. Подобни по продължителност са преходните процеси и при функциите  $e_{ib} = x_i - \tilde{x}_i$  и  $e_{ic} = x_i - \tilde{x}_i$ .



**Фиг. 10.** Функции на разсъгласуване между системи Master (1) и Slave 1 (14) за  $\alpha_a = 10$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Синтезирани са хаотични каскадни синхронизационни схеми на основата на нов модел на хаотична система от трети ред. Използван е метод за синхронизация, който осигурява линейна система от разсъгласуването и следователно – лесен анализ на устойчивостта. С използването на допълнителни връзки се намират най-удачните варианти на синхронизационни схеми. Получените резултати могат да се използват като основа за реализиране на комплексна система за защитено предаване на данни с хаотично маскиране, при която е необходимо да се използват междинни ретранслиращи системи. Същият подход може да се използва и за каскадни схеми с четири или повече хаотични системи.

## REFERENCE

- [1] Andrievskii, B., A. Fradkov. Control of chaos: Methods and applications. I. Methods. Automation and Remote Control, Vol.64, No.5, 2003, pp.673-718.
- [2] Ott, E., C. Grebogi, J. Yorke. Controlling chaos. Physics Letters, vol.64, 1990, pp.1196-1199.
- [3] Chen, G. et.al. Introduction to Chaos Control and Anti-control. 0.1142/9789812798541\_0006. June 2001.
- [4] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Physical Review Letters, Vol.64, No.8, 1990, pp.821-824.

- [5] Boccaletti, S., C. Grebogi, “The control of chaos: theory and applications”, Physics Reports, vol. 329, 2000, pp.103-197.
- [6] Pecora, L., T. Carroll, G. Johnson, D. Mar, J. Heagy, Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications, Chaos 7(4), 1997, pp.520-543.
- [7] Parlitz, U. *et. al.* Encoding messages using chaotic synchronization. Physical Review E, Vol.53, No.5, 1996, pp.4351-4361.
- [8] Cho, K., T. Miyano. Chaotic cryptography using augmented Lorenz equations aided by quantum key distribution. IEEE Trans Circ Systems-I, Vol. 62, No 2, 2015, pp.478-487.
- [9] Zhang, X., Z. Li, De Chang. Dynamics, circuit implementation and synchronization of a new three-dimensional fractional-order chaotic system. Int. J. Electron. Commun. 82 (2017). 435-44.
- [10] Yu, H., L. Yanzhu, Chaotic synchronization based on stability criterion of linear systems, Physics Letters A preprint (2003), pp.1-7.